Prof. Dr. H. Rauhut
Dr. T. Ullrich HCM Uni Bonn

Approximationstheorie

Sommersemester 2009

Übungsblatt 2

1. Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige: Ist $\mathcal{A} \subset C(X)$ eine Algebra, so ist es auch $\overline{\mathcal{A}}$.

2. Seien $X \subset Y$ kompakte metrische Räume, wobei X in Y eingebettet ist (d.h. die Identität ist stetig). Zeige, dass dann mit entsprechender Interpretation (Welche ist das?) gilt $C(Y) \subset C(X)$. Sei weiter $\mathcal{A} \subset C(Y) \subset C(X)$. Warum folgt aus $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$ <u>nicht</u> $\overline{\mathcal{A}} = C(Y)$? Gib ein Gegenbeispiel an!

3. Leite die *Weierstraß*schen Approximationssätze für alebraische und trigonometrische Polynome aus dem Satz von *Stone-Weierstraß* her.

4. Zeige folgende Aussage: Ist $\mathcal{P} \subset \Pi$ ein endlichdimensionaler Raum von Polynomen, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine stetige Funktion $f \in C([0,1])$, so dass
$$\inf_{p \in \mathcal{P}} \|f - p\| > \varepsilon$$
gilt. *Hinweis:* Zeige, dass jedes Π_n ein abgeschlossener Teilraum von $C([0,1])$ ist.

5. Betrachte den Teilraum $\Pi(\text{prim})$ von Π gegeben durch
$$\Pi(\text{prim}) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{x^p \ : \ p \in \mathbb{N}_0 \text{ ist Primzahl oder } p = 0\}$$
und zeige $\overline{\Pi(\text{prim})} = C([0,1])$, obwohl $\Pi(\text{prim})$ keine Algebra ist!

6. Zeige, Π ist dicht in $L_2([0,1])$.